# Irreduzible Darstellungen von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$

Alessandro Fasse

Email:
fasse@thp.uni-koeln.de

WS14/15 - Universität zu Köln

26.01.2015

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einführung** **2**

**2 Darstellungstheorie** **2**

**3 Irreduzible Darstellungen** **3**

**4 Die irreduziblen Darstellungen von $\mathsf{SU}_2(\mathbb{C})$** **4**

**5 Symmetrien des Hamiltonoperators** **6**

**Literatur** **8**

# 1 Einführung

Dies sind die Mitschriften meines Vortrags über **Irreduzible Darstellungen von** $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ bei Herrn Prof. Dr. Burban im Proseminar an Universität zu Köln mit dem Thema: Ausgewählte Kapitel der linearen Algebra.
Im Folgenden werde ich die wichtigsten und nötigen Begriffe einführen um später mit Hilfe Dieser explizit auf die Darstellung der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ eingehen zu können.

# 2 Darstellungstheorie

**Definition 2.1.** Ein Gruppen-Homomorphismus

$$D : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \tag{2.1}$$
$$a \longmapsto D(a) \tag{2.2}$$

heißt eine **Darstellung** von $G$ auf den Trägerraum $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dabei nennt man $n$ den Grad der Darstellung.

**Beispiel 2.1.** (a) Die Abbildung

$$J : \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \tag{2.3}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen und deshalb eine Matrixdarstellung von $\mathrm{U}(1)$ vom Grad 2 über $\mathbb{R}$. Analog ist $J^{-1}$ eine Matrixdarstellung von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ vom Grad 1 über $\mathbb{C}$.

(b) Der Gruppen-Epimorphismus

$$\rho : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \tag{2.5}$$
$$u \longmapsto \rho_u \tag{2.6}$$

aus dem vorherigen Vortrag ist eine Matrixdarstellung von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vom Grad 3 über $\mathbb{R}$.

**Definition 2.2.** Zwei Matrixdarstellungen $D_1, D_2 : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ heißen **äquivalent**, wenn es eine reguläre Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ gibt, so dass

$$D_2(g) = T D_1(g) T^{-1} \quad g \in G. \tag{2.7}$$

**Definition 2.3.** Sei $H$ ein Hilbertraum. Eine Darstellung $D$ von $G$ auf $H$ heißt eine **unitäre Darstellung**, wenn

$$\langle D(g)u | D(g)v \rangle = \langle u|v \rangle \quad g \in G,\ u, v \in H. \tag{2.8}$$

**Satz 2.1.** *(Satz von Maschke).*
*Ist $G$ eine endliche Gruppe, $H$ ein $n$-dimensionaler Hilbertraum, so ist jede Darstellung $D$ von $G$ nach $H$ äquivalent zu einer unitären Darstellung.*

*Beweis.* Sei $D : G \to \mathrm{GL}(H)$ eine gegebene Darstellung. Damit definieren wir in $H$ ein neues Skalarprodukt

$$(u|v) := \sum_{g\in G} \langle D(g)u|D(g)v\rangle\,, \tag{2.9}$$

für $u, v \in H$. Wir zeigen nun, dass jedes $D(h)$ mit $h \in G$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$ unitär ist:

$$(D(h)u|D(h)v) = \sum_{g\in G} \langle D(g)D(h)u|D(g)D(h)v\rangle = \sum_{g\in G} \langle D(gh)u|D(gh)v\rangle \tag{2.10}$$

$$= \sum \langle D(k)u|D(k)v\rangle = (u,v), \tag{2.11}$$

da die Abbildung $g \mapsto k := gh$ bijektiv ist. Die Darstellung $D$ ist also unitär im Bezug auf das neue Skalarprodukt. Sei nun $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis bezüglich $(\cdot,\cdot)$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$, das heißt

$$(u_i|u_j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{2.12}$$

Wir definieren eine lineare Abbildung $S : H \to H$ durch

$$Su_i := v_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.13}$$

Dann gilt:

$$\langle Su|Sv\rangle = (u|v) \quad u, v \in H \tag{2.14}$$

und damit

$$\langle SD(g)S^{-1}u|SD(g)S^{-1}v\rangle = (D(g)S^{-1}u|D(g)S^{-1}v) = (S^{-1}u|S^{-1}v) = \langle u,v\rangle\,, \tag{2.15}$$

das heißt, die äquivalente Darstellung

$$D'(g) = SD(g)S^{-1} \tag{2.16}$$

ist bezüglich des alten Skalarprodukts unitär. □

# 3 Irreduzible Darstellungen

**Definition 3.1.** Sei $D$ eine Darstellung einer Gruppe $G$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$.

(a) Ein Teilraum $U \subseteq V$ heißt **invariant** unter einer Darstellung $D$, wenn

$$D(g)u \in U \quad \forall u \in U,\, g \in G. \tag{3.17}$$

(b) Eine Darstellung $D$ heißt **irreduzibel**, wenn es außer $\{0\}$ und $V$ keinen echten Unterraum $U \subseteq V$ gibt, der invariant unter $D$ ist. Andernfalls heißt $D$ **reduzibel**.

(c) Eine $D$-invarianter Unterraum heißt irreduzibel(bzw. reduzibel), wenn die Einschränkung von $D$ auf $U$ irreduzibel(bzw. reduzibel) ist.

**Beispiel 3.1.** (a) Die 3-dimensionale Standardarstellung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf dem $\mathbb{R}^3$ ist irreduzibel, denn kein 1- oder 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ bleibt unter allen $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ invariant.

(b) Betrachten wir die folgende Darstellung von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auf dem $\mathbb{R}^3$:

$$D : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \tag{3.18}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, denn es sind $U_1 = \mathrm{span}(e_1)$ und $U_2 = \mathrm{span}(e_2, e_3)$ echte invariante Unterräume, i.e. $D(U_1) \subseteq U_1$ und $D(U_2) \subseteq U_2$.

**Lemma 3.1.** *(Schursches Lemma).*

*(a) Ist $D$ eine irreduzible Darstellung von $G$ auf einem $n$-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$, so sind die einzigen linearen Abbildungen $A : V \to V$ mit*

$$AD(g) = D(g)A \quad \forall g \in G \tag{3.20}$$

*Vielfache der Identität, i.e. von der Form*

$$A = \lambda \cdot \mathbb{1} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.21}$$

*(b) Ist $D$ eine unitäre Darstellung von $G$ auf einem $n$-dimensionalen Hilbertraum $H$ und sind die einzigen linearen Abbildungen $A : H \to H$, die (3.20) erfüllen, von der Form (3.21), so ist $D$ irreduzibel.*

**Satz 3.2.** *Jede endlich-dimensionale unitäre Darstellung $D$ einer Gruppe $G$ auf $H$ ist vollreduzibel, i.e. es gibt eine direkte Zerlegung*

$$H = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m, \quad D = D_1 \oplus \ldots \oplus D_m \tag{3.22}$$

*in irreduzible Teildarstellungen $D_i = D\big|_{U_i}$.*

# 4 Die irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$

**Definition 4.1.** Die Menge

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \{ A \in \mathbb{C}_{2\times 2} \mid A^*A = \mathbb{1}, \det A = 1 \} \tag{4.23}$$

heißt die **spezielle unitäre Gruppe**.

**Satz 4.1.** *Die Menge $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ besteht aus allen Matrizen der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

*wobei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$.*

Für $s \in \{ \frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{N} \}$ bezeichnen wir mit $V^s$ den $(2s+1)$-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad $2s$ in zwei Variablen

$$p(z) = p(x,y) = \sum_{j=0}^{2s} c_j x^j y^{2s-j} \quad c_j \in \mathbb{C} \quad \forall j. \tag{4.25}$$

Sei nun $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ wir in Satz 4.1. Auf dem Raum $\mathbb{C}^2$ der Paare $z = (x,y)$ operiere $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ durch Rechtsmultiplikation

$$z' = (x', y') = (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = (ax - \bar{b}y + \bar{a}y + bx) = zA. \tag{4.26}$$

Für $p \in V^s$ kann nun definieren

$$(D^s(A)p)(x,y) = p((x,y)A) = \sum_{j=0}^{2s} c_j (ax - \bar{b}y)^j (\bar{a}y + bx)^{2s-j}. \tag{4.27}$$

Dies stellt in der Tat eine Darstellung, die ebenfalls stetig ist, da $p(zA)$ stetig von den Matrixelementen von $A$ abhängt.

**Satz 4.2.** *Die durch (4.27) definierten $D^s$ sind irreduzible Darstellungen von* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

**Bemerkung 4.1.** Diese Darstellungen sind, bis aus Äquivalenz, alle irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

*Beweis.* Hier benutzen wir das Schursche Lemma 3.1. Sei $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V^s$ ein Operator, der mit allen $D^s(A)$ für $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vertauscht. Wir haben zu zeigen, dass $T$ ein skalares Vielfaches der Identität ist. Dazu betrachten wir zunächst Matrizen $A$ mit $b = 0$. Die Monome

$$p_j(x,y) := x^j y^{2s-j} \tag{4.28}$$

bilden offenbar eine Basis von $V^s$ und für $b = 0$ ergibt (4.25)

$$(D^s(A)p_j)(x,y) = p_j(ax, a^{-1}y) = a^{2j-2s} p_j(x,y), \tag{4.29}$$

i.e. $p_j \in M_j := N(D^s(A) - a^{2j-2s})$, wobei

$$N(A) = \{ v \in V \mid Av = 0 \} \tag{4.30}$$

der Nullraum ist. Für die Vektoren $Tp_j \in V^s$ folgt daraus:

$$D^s(A)Tp_j = TD^s(A)p_j = a^{2j-2s} Tp_j, \tag{4.31}$$

i.e. wir haben auch $Tp_j \in M_j$. Wir wählen $a \in S^1$ nun so, dass die Zahlen $a^{2j-2s}$ alle verschieden sind. Da

$$\sum_{j=0}^{2s} \dim M_j = \dim V^s = 2s + 1 \tag{4.32}$$

sein muss, hat diese zur Folge, dass alle $M_j$ eindimensional sind, also $M_j = \mathrm{span}(p_j)$ für $j \in \{ 0, \ldots, 2s \}$. Insbesondere ist $Tp_j = \lambda_j p_j$ für geeignete $\lambda_j$. Betrachten wir die reelle Drehung $\frac{\pi}{4}$, also die Matrix

$$R := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}). \tag{4.33}$$

Man findet

$$(D^s(R)p_{2s})(x,y) = p_{2s}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\right) = 2^{-s}(x+y)^{2s} = 2^{-s}\sum_{k=0}\binom{2s}{k}x^k y^{2s-k}, \tag{4.34}$$

also $D^s(R)p_{2s} = 2^{-s}\sum_{k=0}^{2s}\binom{2s}{k}p_k$ und somit

$$2^{-s}\sum_{k=0}^{2s}\binom{2s}{k}\lambda_{2s}p_k = \lambda_{2s}D^s(R)p_{2s} = D^s(R)Tp_{2s} = TD^s(R)p_{2s} \tag{4.35}$$

$$= 2^{-s}\sum_{k=0}^{2s}\binom{2s}{k}Tp_k = 2^{-s}\sum_{k=0}^{2s}\binom{2s}{k}\lambda_k p_k. \tag{4.36}$$

Da die $p_k$ linear unabhängig sind, können wir hier die Koeffizienten vergleichen. Das führt zu $\lambda_k = \lambda_{2s}$ für alle $k$, also $T = \lambda_{2s}\cdot \mathbb{1}$. □

Wir übertragen nun dieses Ergebnis für $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ auf die Gruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Nach Beispiel 2.1(b) gibt es einen stetigen Epimorphismus $\rho : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, der $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ doppelt überlagert. Für eine irreduzible Darstellung $D^s$ von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ist der Ansatz:

$$F_s(\rho(A)) := D^s(A) \tag{4.37}$$

für $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ naheliegend. Nun ist aber $\ker\rho = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ und daher

$$\rho(A) = \rho(B) \quad B = -A. \tag{4.38}$$

Dann haben wir nur eine wohldefinierte Abbildung, wenn $D^s(A) = D^s(-A)$ für alle $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Aber (4.31) ergibt für $a = -1$:

$$D^s(-\mathbb{1})p_j = (-1)^{2s}p_j, \tag{4.39}$$

also $D^s(-\mathbb{1}) = (-1)^{2s}\mathbb{1}$ und folglich

$$D^s(-A) = (-1)^{2s}D^s(A). \tag{4.40}$$

Daher ist $F_s$ genau dann eine wohldefinierte Darstellung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, wenn $2s$ gerade, das heißt wenn $s$ ganzzahlig ist. Diese Darstellung ist irreduzibel, da $\rho$ stetig ist und $D^s$ irreduzibel auf $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ist.

**Satz 4.3.** *Sei $\rho$ wie in Beispiel 2.1 definiert. Dann ist für $s \in \mathbb{N}^0$*

$$F_s(\rho(A)) := D^s(A), \quad A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \tag{4.41}$$

*eine stetige, unitäre und irreduzible Darstellung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.*

# 5 Symmetrien des Hamiltonoperators

Betrachten die unitäre Darstellung $D$ von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch

$$(D(R)\psi)(x) := \psi(R^{-1}x), \quad R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}). \tag{5.42}$$

Der **Hamiltonoperator** $H$ eines Teilchens ist gegeben durch

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \tag{5.43}$$

wobei $V(x)$ das zugehörige Potential ist.

**Satz 5.1.** *Ist das Potential* $V(x)$ *invariant unter* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, *das heißt*

$$V(Rx) = V(x) \quad \forall R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}),\, x \in \mathbb{R}^3, \tag{5.44}$$

*so ist der dazu gehörige Hamiltonoperator* $H$ *auf seinem Definitionsbereich mit allen Operatoren* $D(R)$, $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, *der durch (5.42) gegeben Darstellung vertauschbar.*

Dann nennt man $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine Symmetriegruppe des Hamiltonoperators $H$. Dieser Satz hat wesentliche Konsequenzen für das Eigenwertproblem von $H$. Betrachen wir dazu die stationäre Schrödinger-Gleichung

$$H\psi = \lambda\psi \tag{5.45}$$

und nehmen wir an, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert von $H$ und

$$M_\lambda = \{\, \psi \in \mathbb{D}(H) \,|\, H\psi = \lambda\psi \,\} \tag{5.46}$$

der dazu gehörige Eigenraum ist. Es folgt also

$$H(D(R)\psi) = D(R)(H\psi) = \lambda(D(R)\psi), \tag{5.47}$$

i.e. ist $D(R)\psi$ ebenfalls ein Eigenvektor von $H$ zum Eigenwert $\lambda$. Der Teilraum $M_\lambda$ ist also invariant unter der Darstellung $D$.
Allgemeiner erhalten wir:

**Satz 5.2.** *Sei der* $\mathbb{C}$*-Hilbertraum* $H$ *der Zustandsraum eines quantenmechanischen Systems, dessen Gesamtenergie durch den Hamiltonoperator* $H : \mathcal{H} \supseteq \mathbb{D}(H) \to \mathcal{H}$ *repräsentiert wird. Sei ferner* $D$ *eine unitäre Darstellung einer Gruppe* $G$ *auf* $\mathcal{H}$, *so dass*

$$D(R)H\psi = HD(R)\psi \quad \forall R \in G,\, \psi \in D(H), \tag{5.48}$$

*das heißt* $G$ *ist eine Symmetriegruppe von* $H$. *Dann gilt:*

*(a) Jeder Eigenraum von* $H$ *ist invariant unter der Darstellung* $D$, *das heißt ist* $\psi$ *ein Eigenvektor von* $H$ *zum Eigenwert* $\psi$, *so ist auch jedes* $D(R)\psi$, $R \in G$ *ein Eigenvektor von* $H$ *zum selben Eigenwert.*

*(b) Jeder irreduzible Teilraum von* $\mathcal{H}$ *unter* $D$ *ist ein Eigenraum von* $H$ *und die Dimension der irreduziblen Darstellung gibt eine untere Schranke für die Vielfachheit des zugehörigen Eigenwerts an.*

## Literatur

[1] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck. Representations of compact lie groups. Springer Verlag, 1985.

[2] William Fulton and Joe Harris. Representation Theory, A First Course. Springer Verlag, 1991.

[3] K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz, and M. Kraus. Moderne mathematische methoden der physik - band 2. Springer Verlag, 2010.

[4] A. I. Kostrikin. Algebra. Springer Verlag.

[5] Serge Lang. Algebra. Springer Verlag, 2002.

[6] Constantin Teleman. Representation Theory. `https://math.berkeley.edu/~teleman/math/RepThry.pdf`, 2005.